MATRIZEN UND DREHUNGEN

Wie in der Vorlesung erklärt, unterscheiden wir zwischen einem abstrakten Vektor $\vec{a}$ und seinen Komponenten $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^\intercal$, die von der Wahl der Basis abhängen. Matrizen M wenden wir entweder auf Basisvektoren an („aktive Transformation“ $\vec{e}_i{}' = M_{ik}\,\vec{e}_k$), oder auf Komponenten („passive Transformation“ $\underline{a}' = M\,\underline{a}$).
Vorbemerkung: Wir wenden hier M nicht nur aktiv auf Basisvektoren an, sondern in [H14] und [H15](c,d) auch auf andere Vektoren.

[H14] *Aktive Drehungen explizit* **[4 + 6 + 4 + 4 + 4* = 18 Punkte + 4* Extrapunkte]**
Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$. Eine Drehung ist eindeutig durch eine Drehachse $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, und einen Drehwinkel α bestimmt.

Wir erinnern uns außerdem daran, dass ein beliebiger Vektor $\vec{u}$ bezüglich einer Richtung $\vec{n}$ immer in parallelen und senkrechten Anteil zerlegt werden kann, $\vec{u} = \vec{u}_\| + \vec{u}_\perp$, wobei $\vec{u}_\| = \vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{u})$ und $\vec{u}_\perp = \vec{u} - \vec{u}_\|$ ist, siehe auch [P3](C).

Wird nun $\vec{u}$ um die Achse $\vec{n}$ um einen Winkel α gedreht, so erhält man

$$\vec{u}\,' \coloneqq D_{\alpha\vec{n}}(\vec{u}) = \vec{u}_\| + \cos(\alpha)\,\vec{u}_\perp + \sin(\alpha)\,(\vec{n}\times\vec{u})\,. \tag{1}$$

(a) Begründen Sie Gleichung (1). Überlegen Sie dazu, wie der Vektor $\vec{n}\times\vec{u}$ relativ zu $\vec{u}_\|$ und zu $\vec{n}$ steht.
(b) Berechnen Sie $D_{\alpha\vec{n}}(\vec{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$, für die Basisvektoren der Standardbasis als Ausdrücke in α und in den Komponenten n_i von $\vec{n}$. *Hinweis*: Schreiben Sie ab hier abkürzend $C = \cos\alpha$, $S = \sin\alpha$.
(c) Es sei $\vec{b}$ ein beliebiger Einheitsvektor, der senkrecht zur Drehachse stehe. Dann sei $\vec{b}\,' = D_{\alpha\vec{n}}(\vec{b})$ der gedrehte Vektor. Berechnen Sie den Drehwinkel aus dem Skalarprodukt $\vec{b}\,'\cdot\vec{b}$. Wenn Sie alles richtig machen, sollte natürlich α als Drehwinkel herauskommen.
(d) Bestätigen Sie, dass $D_{\alpha\vec{n}}(\vec{n}) = \vec{n}$ ist, dass also die Drehung die Drehachse nicht ändert.
(e*) *Bonusaufgabe*: Geben Sie die Matrix $D_{\alpha\vec{n}}$ an. Dies ist die allgemeine Form einer Drehmatrix.

[H15] *Star Trek* **[6 + 2 + 3 + 3 + 4 = 18 Punkte]**
Die *Vereinte Föderation der Planeten* nutzt ein Fixstern-festes interplanetares Koordinatensystem mit Einheitsvektoren $\vec{e}_j$. Neu der Föderation beigetretene Planeten teilen die Drehachse und Winkelgeschwindigkeit ihrer Eigendrehung mit, so auch der Planet Qo’noS. Dazu definieren die Klingonen ein Qo’noS-festes Koordinatensystem $\vec{f}_j$, welches zu $t = 0$ mit dem $\vec{e}_j$-System zusammenfällt, und von dem aus die zeitliche Veränderung der Komponenten von $\vec{e}_j$, also die Spalten einer Drehmatrix D, beobachtet wird. Mit $c = \cos(\omega t)$ und $s = \sin(\omega t)$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist, erhalten wir in einer verstümmelten[1] Subraum-Übertragung

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c{+}1 & \sqrt{2}s & c{-}1 \\ -\sqrt{2}s & \dots & -\sqrt{2}s \\ c{-}1 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die fehlenden Daten und berechnen Sie zur Probe $\det(D)$ und $\mathrm{sp}(D)$.
(b) Welche Gestalt nimmt D zu $\omega t = \pi/2$ an?
(c) Der Spezialfall (b) genügt, um Komponenten eines Vektors $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 1$ zu bestimmen, die die Drehachse angeben. Als Probe überprüfen Sie, ob zu allen Zeiten $\vec{n} = D\,\vec{n}$ ist.
(d) Zu $\vec{n}$ findet man (durch Hinsehen) sehr leicht Komponenten eines Vektors $\vec{b}$ mit $\vec{b}\perp\vec{n}$ und $|\vec{b}| = 1$. Überprüfen Sie, dass $\vec{n}\cdot(D\,\vec{b}\times\vec{b}) = \pm\sin(\omega t)$ ist. Ändern Sie gegebenenfalls das Vorzeichen von $\vec{n}$ so, dass Sie $+\sin(\omega t)$ erhalten. Damit ist dann $\vec{\omega} = \omega\,\vec{n}$ als Drehachse festgelegt.
(e) Überlegen Sie, wie sich $D = D_0^\intercal\,\tilde{D}\,D_0$ aus einfachen Drehmatrizen D_0 und $\tilde{D}$ um kartesische Koordinatenachsen (siehe Vorlesung) zusammensetzen lässt. Geben Sie also D_0 und $\tilde{D}$ an.

[1] Die Romulaner versuchen, den Frieden zwischen Klingonen und Menschen zu unterminieren.

[C2] *Planetenbahnen* **[12 + 9 + 12* = 21 Computerpunkte + 12* Extracomputerpunkte]**

Dies ist die zweite Computerübung. Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe von Computerübungen in Abschnitt 5 der Informations-Seiten zur Vorlesung im Stud.IP, den Sie im Kapitel „Abgabe von Übungen" finden. Die Computerübung ist in *Python* zu lösen. Ihre Lösung dokumentieren und kommentieren Sie bitte ausführlich in einem Jupyter-Notebook. Sie haben für die Bearbeitung dieser Aufgabe **zwei Wochen** Zeit.

In dieser zweiten Übung geht es darum, dass Sie die numerische Lösung einer Bewegungsgleichung mit einem *Python*-Programm erstellen und visualisieren. Dazu benötigen Sie Kenntnisse im Umgang mit den Modulen NumPy, MatPlotLib und SciPy. Die ersten beiden Module wurden in der vierten und fünften Vorlesungswoche in der *Einführung in Python* besprochen. Für das Modul SciPy stellen wir ein Template zur Verfügung, das die Verwendung an einem einfachen Beispiel demonstriert (siehe unten).

Wir wollen uns davon überzeugen, dass das Kepler-Problem tatsächlich die in der Vorlesung diskutierten Bahnen besitzt. Dafür simulieren wir die Bewegung eines kleineren Planeten im Gravitationsfeld der Sonne. Wir machen die Vereinfachung, dass wir die reduzierte Masse $\mu \approx m_{\text{Planet}}$ setzen, und die (sehr viel schwerere) Sonne als fest im Ursprung sitzend annehmen.

(a) Simulieren Sie die Bahn der Erde. Als Anfangsbedingung wählen wir Position und Geschwindigkeit der Erde in ihrem Aphel. Sie hat dort einen Abstand von $152.10 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ von der Sonne und eine Momentangeschwindigkeit von $29.29\,\mathrm{km/s}$, die im Aphel senkrecht auf dem Ortsvektor steht (vergleiche [H13]). Es ist sinnvoll, die Simulation in Astronomischen Einheiten durchzuführen, definiert als $1\,\mathrm{AE} = 1.495\,979\,707\,10^{11}\,\mathrm{m}$. Eine Astronomische Einheit ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne. Da wir wissen, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet, können wir die Bewegungsgleichung als zweidimensionales Problem formulieren. Lösen Sie dieses mit Hilfe von `scipy.integrate.solve_ivp` aus dem SciPy Module. Führen Sie die Simulation für 5 Jahre durch, wählen Sie eine Schrittweite von 1 Tag. Damit die Lösung ausreichend genau wird, übergeben Sie der Funktion `solve_ivp` die Option `rtol=1e-9`, die die Fehlerschranke sehr klein wählt.

(b) Wiederholen Sie die Simulation für Merkur. Die Dauer sollte jetzt ein Erdjahr betragen, die Schrittweite wieder ein Erdtag. Sein Abstand zur Sonne im Aphel beträgt $0.466\,697\,\mathrm{AE}$. Der Merkur hat dort eine Geschwindigkeit von $38.8586\,\mathrm{km/s}$. Sie sollten herausfinden, dass die Bahn des Merkur deutlich stärker elliptisch ist als die der Erde. Gegebenenfalls müssen Sie durch Optionen für `solve_ivp` die Genauigkeit weiter steigern.

(c*) Fügen Sie dem Zentralpotential einen Term $-\gamma/r^3$ ähnlich wie in [P13] hinzu. Dies führt zu einer zusätzlichen Kraft $\vec{F}_{\text{ART}} = -\gamma\,\vec{r}/r^5$. Simulieren Sie die Bewegung des Merkurs für ein Erdjahr, wählen Sie als Schrittweite wieder einen Tag. Probieren Sie verschiedene Werte für γ. Mit etwas Glück ergeben sich statt einer Ellipse Rosetten.
Bemerkung: In der Tat dreht sich das Perihel des Merkurs im Laufe der Zeit langsam. Der größte Anteil dieser Periheldrehung geht allerdings auf den Einfluss der anderen Planeten als Störung zum Zweikörper-Problem zurück. Jedoch ergab sich im Laufe der Zeit eine signifikante Abweichung der Beobachtung vom theoretisch vorhergesagten Wert, der durch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie letztendlich im Rahmen der Messgenauigkeit exakt erklärt wird.

Hinweis: Lesen Sie die Dokumentation zu `solve_ivp`, zum Beispiel unter docs.scipy.org oder unter pundit.pratt.duke.edu. Zusätzlich können Sie das zur Verfügung gestellte Template verwenden, das demonstriert, wie `solve_ivp` zur numerischen Lösung einer einfachen Bewegungsgleichung eingesetzt werden kann.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.